Aula 42

Definição: Dado um sistema de EDOs lineares de primeira ordem homogéneo, de coeficientes constantes

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = A\mathbf{y},$$

chama-se **exponencial matricial** de At, e representa-se por e^{At}, à (única) solução matricial principal do sistema em $t_0 = 0$, ou seja, a única solução do problema

$$\begin{cases} \frac{de^{At}}{dt} = Ae^{At} \\ e^{A0} = I. \end{cases}$$

Proposição: Dada uma matriz A, $n \times n$, a exponencial matricial e^{At} é dada pela série

$$\begin{aligned} e^{At} &= I + At + A^2\frac{t^2}{2!} + A^3\frac{t^3}{3!} + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} A^n \frac{t^n}{n!} \end{aligned}$$

Proposição: O problema de Cauchy para o sistema de EDOs lineares de primeira ordem homogéneo, de coeficientes constantes

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = A\mathbf{y}, \qquad \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0,$$

tem solução dada por

$$\mathbf{y}(t) = e^{A(t-t_0)}\mathbf{y}_0.$$

Proposição: Dadas matrizes A, B, $n \times n$, tem-se

i) Em $t = 0$, $e^{At} = e^{[0]} = I$.

ii) Se

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_k \end{bmatrix}$$

é uma matriz por blocos, então e^{At} também é uma matriz por blocos e tem-se

$$e^{At} = \begin{bmatrix} e^{A_1 t} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{A_2 t} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{A_k t} \end{bmatrix}$$

iii) Se A e B comutam, ou seja, se $AB = BA$ então $e^{(A+B)t} = e^{At}e^{Bt}$.

iv) e^{At} é sempre não singular, com inversa $(e^{At})^{-1} = e^{-At}$.

v) Se

$$A = S \Lambda S^{-1},$$

então

$$e^{At} = S e^{\Lambda t} S^{-1}.$$

Caso A não diagonalizável

Forma Canónica de Jordan

$$A = SJS^{-1}$$

$$J = \begin{bmatrix} [J_1] & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & [J_2] & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & [J_k] \end{bmatrix}$$

Um bloco de Jordan $[J_i]$ por cada vector próprio independente

$$J_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_i & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \lambda_i \end{bmatrix}$$

com vectores de base correspondentes

$$A\mathbf{v} = \lambda_i \mathbf{v} \Leftrightarrow (A - \lambda_i I)\mathbf{v} = \mathbf{0}$$

$$A\mathbf{w}_1 = \mathbf{v} + \lambda_i \mathbf{w}_1 \Leftrightarrow (A - \lambda_i I)\mathbf{w}_1 = \mathbf{v}$$

$$A\mathbf{w}_2 = \mathbf{w}_1 + \lambda_i \mathbf{w}_2 \Leftrightarrow (A - \lambda_i I)\mathbf{w}_2 = \mathbf{w}_1$$

$$\cdots$$

Exponencial da Forma Canónica de Jordan

$$e^{Jt} = \begin{bmatrix} [e^{J_1 t}] & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & [e^{J_2 t}] & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & [e^{J_k t}] \end{bmatrix}$$

com

$$e^{J_i t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_i t} & te^{\lambda_i t} & \frac{t^2}{2!}e^{\lambda_i t} & \frac{t^3}{3!}e^{\lambda_i t} & \cdots & \frac{t^{m-1}}{(m-1)!}e^{\lambda_i t} \\ 0 & e^{\lambda_i t} & te^{\lambda_i t} & \frac{t^2}{2!}e^{\lambda_i t} & \cdots & \frac{t^{m-2}}{(m-2)!}e^{\lambda_i t} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & e^{\lambda_i t} & te^{\lambda_i t} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & e^{\lambda_i t} \end{bmatrix}$$